Systèmes de numération indépendants et syndéticité

Georges HANSEL

1 Introduction

Ce travail est dédié au sourire de M. P. Schützenberger, sourire incomparable, inoubliable, expression de qualités rarement rencontrées ensemble, génie et gentillesse, humour et rigueur intellectuelle, le tout appuyé sur un courage indomptable face aux épreuves de l'histoire ou de la vie. Dans les lignes qui vont suivre, il aurait reconnu – ou peut-être reconnaît-il – la trace de quelques-unes de ses innombrables et profondes idées.

Dans un article fondamental [6], Cobham a montré le théorème suivant : soient p et q deux entiers positifs indépendants (i.e. il n'existe pas de relation non triviale de la forme $p^m = q^n$) ; une partie $X \subseteq N$ est reconnaissable dans les systèmes de numération en bases p et q si et seulement si elle est ultimement périodique.

Ce résultat a depuis donné lieu à de nombreux travaux, essentiellement dans trois directions :

– simplification de la preuve initiale,

– généralisation à certains systèmes de numération à base non entière θ tels qu'ils ont été introduits par A. Bertrand [1],

– généralisation à des parties de N^k.

On pourra consulter à ce sujet la synthèse écrite par V. Bruyère [3] qui présente l'ensemble des résultats existants (ainsi que ceux relatifs à des questions connexes, telles que la rationalité de l'addition et la reconnaissabilité de l'ensemble N tout entier) et également l'article de V. Bruyère et *al.* [5].

Jusqu'à présent, le cadre de ces travaux comportait au moins deux conditions :

• tout nombre réel $\theta > 1$, base d'un système de numération considéré, était un nombre de Pisot (i.e. les racines autres que θ du polynôme minimal de θ sont de module < 1).

• Il résulte déjà de la condition précédente que le système de numération vérifie une relation de récurrence linéaire et l'on supposait de plus que le polynôme définissant cette récurrence était le polynôme minimal de θ.

Notons encore que la première de ces conditions implique aussi que l'ensemble N lui-même est reconnaissable en base θ (ou, ce qui revient au même, que le "développement" de θ est ultimement périodique).

Dès l'origine, il apparaissait que la preuve "d'un théorème de Cobham" s'effectue normalement en deux étapes : preuve que la partie X considérée est syndétique ; démonstration de l'ultime périodicité de X.

Dans le présent article, nous ne supposons "plus rien" sur le nombre θ et nous montrons le résultat général suivant : *Soient θ et θ' deux nombres réels > 1 indépendants ; une partie X de N qui est reconnaissable dans les systèmes de numération définis par θ et θ' est syndétique.*

Moyennant les résultats de logique de C. Michaux et R. Villemaire [9], on peut en déduire sous certaines hypothèses un "théorème de Cobham" dans N^k.

2 Systèmes de numération d'A. Bertrand

D'une façon générale, un système de numération est une suite strictement croissante $(U_n)_{n \in N}$ d'entiers positifs telle que $U_0 = 1$.

Soit un entier $u > 0$; une *représentation* de u est une suite $r_0 r_1 \ldots r_n$ d'entiers positifs ou nuls avec $r_0 > 0$ qui vérifie la relation

$$u = r_0 U_n + r_1 U_{n-1} + \ldots + r_n U_0$$

La représentation *normale* $r(u) = r_0 \ldots r_n$ de u vérifie de plus les conditions :

• sa longueur $n + 1$ est la plus grande possible (n est le plus grand entier tel que $U_n \leq u$) :

• c'est la plus grande dans l'ordre lexicographique parmi les représentations de longueur $n + 1$.

La représentation normale $r(u)$ est donnée par *l'algorithme glouton* : r_0 est le plus grand entier tel que $r_0 U_n \leq u$; ayant défini, $r_0, r_1, \ldots, r_{i-1}$, le nombre r_i est le plus grand entier tel que

$$r_i U_{n-i} \leq u - (r_0 U_n + r_1 U_{n-1} + \ldots + r_{i-1} U_{n-i+1})$$

Soit $r_0r_1\dots r_n$ la représentation normale d'un entier. Il est toujours vrai qu'un suffixe $r_k\dots r_n$ de cette représentation est encore la représentation normale d'un entier (éventuellement précédée de zéros). Par contre, il n'est pas toujours vrai qu'un préfixe $r_0r_1\dots r_k$ est aussi la représentation normale d'un entier. De même, il n'est pas toujours vrai que la suite $r_0r_1\dots r_n0$ est la représentation normale d'un entier. Les systèmes de numération entiers classiques définis par une suite $U_n = p^n$, $n \in N$, vérifient ces propriétés, mais c'est le mérite définitif d'A. Bertrand [1] d'avoir caractérisé les systèmes de numération qui les satisfont. En voici la construction.

Soit θ un réel positif quelconque > 1. On définit le "développement de θ" : c'est la plus grande suite $(a_n)_{n\in N}$ d'entiers dans l'ordre lexicographique, ne se terminant pas par des zéros, et telle que

$$\theta = a_0 + \frac{a_1}{\theta} + \frac{a_2}{\theta^2} + \frac{a_3}{\theta^3} + \dots$$

On pose alors

$$\begin{array}{rcl}
U_0 & = & 1 \\
U_1 & = & a_0U_0 + 1 \\
U_2 & = & a_0U_1 + a_1U_0 + 1 \\
U_3 & = & a_0U_2 + a_1U_1 + a_2U_0 + 1 \\
 & & \dots\dots\dots\dots\dots \\
U_{n+1} & = & a_0U_n + a_1U_{n-1} + \dots + a_nU_0 + 1 \\
 & & \dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Remarque. Soit $u \in N$, $r(u)$ sa représentation normale et $p \in N$. Le mot $0^p r(u)$ sera encore appelé par extension *représentation normale de u*. Avec cette convention, u et v étant deux entiers, $u \leq v$ si et seulement si $r(u)$ est inférieur à $r(v)$ dans l'ordre lexicographique, sous réserve que $r(u)$ et $r(v)$ soient deux représentations normales de même longueur obtenues en complétant éventuellement l'une d'entre elles par des zéros à gauche.

2.1 Exemples

1) Avec $\theta = 10$ on retrouve le système de numération décimal

$$10 = 9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots$$

Donc $(a_n) = 999999\dots$

$$\begin{array}{rcl} U_0 & = & 1 \\ U_1 & = & 9U_0 + 1 = 10 \\ U_2 & = & 9U_1 + 9U_0 + 1 = 90 + 9 + 1 = 10^2 \\ \dots & & \dots\dots\dots\dots\dots \\ U_n & = & 10^n \end{array}$$

2) Avec $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or, on obtient le système de numération de Fibonacci. On vérifie que $(a_n) = 1010101\dots$, suite périodique.

$U_0 = 1$

$U_1 = a_0U_0 + 1 = 2$

puis, par récurrence, on a la relation

$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$.

Le polynôme de la récurrence est $P(x) = x^2 - x - 1$ et c'est le polynôme minimal de θ. Les premiers termes de la suite (U_n) sont

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13\dots$$

Comme $17 = 13 + 3 + 1$, la représentation normale de 17 dans ce système est

$$r(17) = 100101$$

3) Avec $\theta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, carré du nombre d'or, on vérifie que $(a_n) = 211111\dots$, suite ultimement périodique.

$U_0 = 1$

$U_1 = a_0U_0 + 1 = 3$

puis par récurrence, on vérifie que

$U_n = 3U_{n-1} - U_{n-2}$.

Le polynôme de la récurrence est $P(x) = x^2 - 3x + 1$ et c'est le polynôme minimal de θ. Les premiers termes de la suite (U_n) sont

$$1 \quad 3 \quad 8 \quad 21 \quad 55 \quad 144\dots$$

Comme $51 = 2 \times 21 + 8 + 1$, la représentation de 51 dans ce système est

$$r(51) = 2101$$

4) **Cas général.** Dans le cas général, de nombreuses circonstances peuvent se produire :

– la suite (a_n) peut ne pas être ultimement périodique ; c'est en particulier le cas si θ est un nombre transcendant (car si la suite (a_n) est ultimement périodique, la suite (U_n) vérifie une relation de récurrence linéaire et θ est racine du polynôme de la récurrence et donc est algébrique).

– dans le cas où la suite (a_n) est ultimement périodique, le polynôme de la récurrence peut être un multiple strict du polynôme minimal de θ. Toutefois, dans tous les cas, θ est une racine simple du polynôme de la récurrence et majore strictement en module les autres racines de ce polynôme.

2.2 Quelques propriétés des systèmes de numération de Bertrand

Soit $\theta > 1$ un nombre réel, $(a_n)_{n \in N}$ son développement et $(U_n)_{n \in N}$ le système de numération associé. On a (en particulier) les propriétés suivantes (cf. [1]).

1) Une suite d'entiers $r_0 r_1 \dots r_n$ est une représentation normale d'un entier si et seulement si pour tout $i = 0, 1, \dots, n$, la suite $r_i r_{i+1} \dots r_n$ est inférieure ou égale dans l'ordre lexicographique à la suite $a_0 a_1 \dots a_{n-i}$ (c'est-à-dire au préfixe de la suite (a_n) de même longueur).

Notamment, pour tout $i = 0, \dots, n$, on a $r_i \leq a_0 = \lceil \theta \rceil - 1$, où $\lceil \theta \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à θ. Définissons *l'alphabet* A par

$$A = \{0, 1, \dots, \lceil \theta \rceil - 1\}$$

Toute représentation normale est donc un *mot* sur l'alphabet A, ou encore un élément du monoïde libre A^*.

Egalement, si $r_0 r_1 \dots r_n$ est une représentation normale, et si, pour tout $i = 0, \dots, n$, $r'_i \leq r_i$, alors $r'_0 r'_1 \dots r'_n$ est aussi une représentation normale (précédée éventuellement de zéros).

2) Pour tout $p \in N$, la fin de suite $(a_{n+p})_{n \in N}$ est inférieure ou égale dans l'ordre lexicographique à la suite complète $(a_n)_{n \in N}$. Compte-tenu de 1), il en résulte que tout mot $a_j a_{j+1} \dots a_{j+n}$ facteur de la suite (a_n) est la représentation normale d'un entier (précédée éventuellement de zéros).

3) Pour tout $n \in N$, U_n est le nombre de représentations normales de longueur inférieure ou égale à n.

4) La suite $(\frac{U_n}{\theta^n})_{n\in N}$ converge vers une limite L. Plus précisément, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{\theta^n} = L = \frac{\frac{a_0}{\theta} + \frac{2a_1}{\theta^2} + \frac{3a_2}{\theta^3} + \dots}{\theta - 1}$$

3 Parties θ-reconnaissables de N

Soit $\theta > 1$ un nombre réel, $(a_n)_{n\in N}$ son développement et $(U_n)_{n\in N}$ le système de numération associé.

Soit X une partie de N. On dit que X est *θ-reconnaissable* si l'ensemble

$$r(X) = \{r(x) \mid x \in X\}$$

des représentations normales des éléments de X est une partie reconnaissable du monoïde $A^* = \{0, 1, \dots, \lceil\theta\rceil - 1\}^*$.

Il est classique que l'ensemble N lui-même est θ-reconnaissable si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in N}$ est ultimement périodique. Cela est encore équivalent à ce que la suite (U_n) est donnée par une relation de récurrence linéaire (et θ est alors une racine du polynôme de la récurrence).

Dans la suite, nous ne faisons pas cette hypothèse.

4 θ-approximation et décalage

Soit $\theta > 1$ un nombre réel, $(U_n)_{n\in N}$ le système de numération associé, et soit $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{\theta^n}$.

Soit $u \in N$, $r(u) = r_0 r_1 \dots r_n$ la représentation normale de u. On a donc

$$u = r_0 U_n + r_1 U_{n-1} + \dots + r_n U_0$$

On appelle *θ-approximation* de u le nombre $\alpha(u)$ défini par

$$\alpha(u) = L(r_0\theta^n + r_1\theta^{n-1} + \dots + r_n\theta^0)$$

Pour tout $p \in N$, on définit le nombre $d_p(u)$, *décalé (d'ordre p)* de u par

$$d_p(u) = r_0 U_{n+p} + r_1 U_{n-1+p} + \ldots + r_n U_p$$

Autrement dit, grâce aux propriétés d'un système de Bertrand, $d_p(u)$ a pour représentation normale $r_0 r_1 \ldots r_n 0^p$.

Lemme 1 *On a les propriétés suivantes :*

1) $\lim_{u \to +\infty} \frac{u}{\alpha(u)} = 1$ *;*

2) *Pour tous* $u, p \in N$, $\alpha(d_p(u)) = \theta^p \alpha(u)$ *;*

3) *Pour tout* $u \in N$, $\lim_{p \to +\infty} \frac{d_p(u)}{\theta^p \alpha(u)} = 1$ *;*

4) *pour tout* $u \in N$, $\alpha(u+1) > \alpha(u)$.

Démonstration. 1) résulte aisément du fait que $\lim \frac{U_n}{L\theta^n} = 1$ et de ce que les nombres r_i sont bornés par a_0.
2) résulte de la définition même de $d_p(u)$.
3) est conséquence de 1) et 2).

Montrons 4). Soit $u \in N$ et soit

$$r(u) = r_0 r_1 \ldots r_n \tag{1}$$

la représentation normale de u. Soit $r_j r_{j+1} \ldots r_n$ le plus grand suffixe de $r(u)$ égal à un préfixe du développement (a_n) de θ. Supposons d'abord que $j > 0$. Compte-tenu de la définition des U_n, on a

$$\begin{aligned} u+1 &= r_0 U_n + \ldots + r_{j-2} U_{n-j+2} + r_{j-1} U_{n-j+1} && (2) \\ &\quad + a_0 U_{n-j} + a_1 U_{n-j-1} + \ldots + a_{n-j} U_0 + 1 \\ &= r_0 U_n + \ldots + r_{j-2} U_{n-j+2} + (r_{j-1}+1) U_{n-j+1} && (3) \end{aligned}$$

Montrons que cela implique que la représentation normale de $u+1$ est

$$r(u+1) = r_0 r_1 \ldots r_{j-2} (r_{j-1}+1) 0^{n-j+1} \tag{4}$$

En vertu de (3), il suffit de montrer que $r_0 r_1 \ldots r_{j-2}(r_{j-1}+1)$ est la représentation normale d'un entier, soit encore que tous ses suffixes sont inférieurs ou égaux au préfixe correspondant de la suite (a_n).

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors il existerait un entier $k \leq j-1$ tel que

$$r_k r_{k+1} \dots r_{j-2}(r_{j-1}+1) > a_0 a_1 \dots a_{j-k-2} a_{j-k-1} \tag{5}$$

Mais comme $r_k r_{k+1} \dots r_{j-2} r_{j-1}$ est une représentation normale (en tant que facteur de représentation normale), on a aussi

$$r_k r_{k+1} \dots r_{j-2} r_{j-1} \leq a_0 a_1 \dots a_{j-k-2} a_{j-k-1} \tag{6}$$

Il résulte de (5) et (6) que

$$r_k r_{k+1} \dots r_{j-2} r_{j-1} = a_0 a_1 \dots a_{j-k-2} a_{j-k-1} \tag{7}$$

On en déduit (en utilisant les propriétés 1 et 2 de 2.2)

$$\begin{array}{rcl} a_0 a_1 \dots a_{n-k} & \geq & r_k r_{k+1} \dots r_{j-1} r_j \dots r_n \\ & = & a_0 a_1 \dots a_{j-k-1} a_0 a_1 \dots a_{n-j} \\ & \geq & a_0 a_1 \dots a_{j-k-1} a_{j-k} \dots a_{n-k} \end{array}$$

Mais alors, contrairement à l'hypothèse initiale, $r_k r_{k+1} \dots r_n$ serait un préfixe de la suite (a_n) plus long que $r_j \dots r_n$. Donc (4) est bien vérifié.

On a alors en vertu de (1), (4), et des définitions de la fonction α et du développement de θ

$$\begin{array}{rcl} \alpha(u+1) - \alpha(u) & = & L(\theta^{n-j+1} - \sum_{i=0}^{n-j} a_i \theta^{n-j-i}) \\ & = & L\theta^{n-j}(\theta - \sum_{i=0}^{n-j} \frac{a_i}{\theta^i}) > 0 \end{array}$$

Il reste à considérer le cas où $r(u) = a_0 a_1 \dots a_n$. Mais alors

$$u + 1 = a_0 U_n + a_1 U_{n-1} + \dots + a_n U_0 + 1 = U_{n+1}$$

Par conséquent on a encore

$$\begin{array}{rcl} \alpha(u+1) - \alpha(u) & = & L(\theta^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} a_i \theta^{n-i}) \\ & = & L\theta^{n}(\theta - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{\theta^i}) > 0 \end{array}$$

5 Un lemme de l'étoile

Soit $\theta > 1$ un nombre réel et soit $X \subseteq N$ une partie θ-reconnaissable. Soit $r(X) \subseteq A^* = \{0, 1, \ldots, \lceil\theta\rceil - 1\}^*$ l'ensemble des représentations normales des éléments de X.

Soit une représentation normale quelconque $s = r_0 r_1 \ldots r_n \in r(X)$. On note $|s| = n + 1$ sa longueur et $\pi(s)$ sa *valeur*, c'est-à-dire le nombre

$$\pi(s) = r_0 U_n + r_1 U_{n-1} + \ldots + r_n U_0$$

Soient deux mots s et t dans A^* tels que leur produit st soit la représentation normale d'un entier. On vérifie aisément la relation

$$\alpha(st) = \theta^{|t|}\alpha(s) + \alpha(t) \tag{8}$$

On dit que deux mots s et t sur l'alphabet A sont X-*équivalents* s'ils sont équivalents pour l'équivalence d'automate associée à l'ensemble $r(X)$, c'est-à-dire si pour tout mot $w \in A^*$,

$$sw \in r(X) \iff tw \in r(X)$$

Comme X est θ-reconnaissable, la X-équivalence est une congruence à droite d'index fini. La méthode classique du lemme de l'étoile va permettre de montrer le résultat suivant.

Lemme 2 *Soit X une partie infinie θ-reconnaissable de N. Il existe un entier $q > 0$, un nombre réel $a > 0$ et un nombre réel b tels que pour tout $n \in N$, il existe $x_n \in X$ tel que*

$$\alpha(x_n) = a\theta^{qn} + b$$

Démonstration. Soit $x \in X$ assez grand pour que la longueur du mot $r(x)$ soit strictement supérieure à l'index de la relation de X-équivalence et supposons que $r(x) = r_0 r_1 \ldots r_n$. Il existe donc i et j tels que $0 \leq i < j \leq n$ et tels que les mots $r_0 r_1 \ldots r_i$ et $r_0 r_1 \ldots r_j$ sont X-équivalents. Posons $s = r_0 r_1 \ldots r_i$, $t = r_{i+1} \ldots r_j$ et $w = r_{j+1} \ldots r_n$. Les mots s et st étant X-équivalents, pour tout $n \in N$, $st^n w \in r(X)$. En utilisant la formule (8), on obtient

$$\alpha(\pi(st^n w)) = \theta^{|t|n+|w|}\alpha(\pi(s)) + \theta^{|w|}\sum_{i=0}^{n-1}\theta^{|t|i}\alpha(\pi(t)) + \alpha(\pi(w))$$

Pour tout $n \in N$, posons $x_n = \pi(st^n w)$ et soit $q = |t|$. On a

$$\alpha(x_n) = \theta^{|w|}\alpha(\pi(s))\theta^{qn} + \theta^{|w|}\alpha(\pi(t))\frac{\theta^{qn}-1}{\theta^q - 1} + \alpha(\pi(w))$$

égalité dont on déduit rapidement le résultat voulu.

6 Parties (θ, θ')-reconnaissables et syndéticité

Rappelons que deux nombres réels positifs θ et θ' sont *indépendants* s'il n'existe pas deux entiers p et q (autres que 0) tels que $\theta^p = \theta'^q$. Il revient au même de dire que l'ensemble des rapports $\frac{\theta^p}{\theta'^q}$, $p, q \in N$, est dense dans R^+.

Une partie X de N est *syndétique* s'il existe un entier p tel que pour tout $n \in N$, $X \cap [n, n+p] \neq \emptyset$.

Théorème 1 *Soient θ et θ' deux nombres réels > 1 indépendants et soit X une partie infinie de N qui est à la fois θ-reconnaissable et θ'-reconnaissable. Alors X est syndétique.*

Démonstration. Soit $u \in N$ et soit $r(u)$ la représentation normale de u dans le système de numération associé à θ. La représentation normale de $d_p(u)$ est $r(d_p(u)) = r(u)0^p$. Par conséquent, un nombre w appartient à l'intervalle $[d_p(u), d_p(u+1)[$ si et seulement si sa représentation normale est de la forme $r(w) = r(u)s_0s_1 \ldots s_{p-1}$. On en déduit deux conséquences.

Tout d'abord, comme $s_i \leq \lceil\theta\rceil - 1$ pour tout $i = 0, \ldots, p-1$, on a

$$d_p(u+1) - d_p(u) < (\theta+1)^p$$

D'autre part, soient u et v deux nombres dont les représentations normales $r(u)$ et $r(v)$ sont X-équivalentes. Alors $[d_p(u), d_p(u+1)[\cap X = \emptyset$ si et seulement si $[d_p(v), d_p(v+1)[\cap X = \emptyset$.

Deux cas sont alors possibles.

Premier cas : il existe $p \in N$ tel que pour tout $u \geq p$

$$[d_p(u), d_p(u+1)[\cap X \neq \emptyset$$

Donc à partir du nombre $d_p(p)$, la distance entre deux éléments consécutifs de X est majorée par

$$\sup_u(d_p(u+2) - d_p(u)) \leq 2\sup_u(d_p(u+1) - d_p(u)) < 2(\theta+1)^p$$

Il en résulte que X est syndétique.

Deuxième cas : pour tout $p \in N$, il existe $u_p \geq p$ tel que

$$[d_p(u_p), d_p(u_p+1)[\, \cap X = \emptyset \tag{9}$$

Nous allons montrer que ce deuxième cas est incompatible avec le fait que X est à la fois θ-reconnaissable et θ'-reconnaissable.

Comme X est θ-reconnaissable, il existe une suite strictement croissante $(p_n)_{n\in N}$ d'entiers telle que toutes les représentations normales $r(u_{p_n})$, $n \in N$, soient X-équivalentes. Soit $u = u_{p_0}$; alors pour tout $n \in N$,

$$[d_{p_n}(u), d_{p_n}(u+1)[\, \cap X = \emptyset$$

Soit $A = \{0, 1, \ldots, \lceil\theta\rceil - 1\}$ et posons

$$S = \{s \in A^* \mid r(u)s \in r(X)\}$$

Comme $r(X)$ est une partie reconnaissable de A^*, il en est de même de l'ensemble S. Mais l'application $s \mapsto |s|$ qui, à un élément $s \in A^*$ associe sa longueur $|s|$, est un morphisme de A^* dans le monoïde N (N muni de l'addition). Par conséquent l'ensemble $Y = \{|s| \mid s \in S\}$ des longueurs des éléments de S est une partie reconnaissable de N. Il en est encore de même de son complémentaire Y^c. Or, par définition,

$$\begin{aligned} p \in Y^c \quad &\Longleftrightarrow \quad (\forall s \in A^*) : |s| = p \Rightarrow r(u)s \notin r(X) \\ &\Longleftrightarrow \quad [d_p(u), d_p(u+1)[\, \cap X = \emptyset \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in N$, $p_n \in Y^c$ et par conséquent Y^c est une partie infinie reconnaissable de N, c'est-à-dire une partie infinie ultimement périodique. Il existe donc deux entiers $p, m \in N$ tels que pour tout $n \in N$,

$$[d_{p+mn}(u), d_{p+mn}(u+1)[\, \cap X = \emptyset$$

Posons $v = d_p(u)$. Comme $d_p(u) + 1 \leq d_p(u+1)$, on a pour tout $n \in N$,

$$[d_{mn}(v), d_{mn}(v+1)[\, \cap X = \emptyset \tag{10}$$

En vertu du lemme 1-4), il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\alpha(v)(1+\varepsilon) < \alpha(v+1)(1-\varepsilon) \tag{11}$$

En vertu du lemme 1-3), il existe $n_0 \in N$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{d_{mn}(v)}{\theta^{mn}} < \alpha(v)(1+\varepsilon) < \alpha(v+1)(1-\varepsilon) < \frac{d_{mn}(v+1)}{\theta^{mn}} \tag{12}$$

Mais X est aussi θ'-reconnaissable. Aussi, en vertu du lemme 2, il existe $a > 0$, $b \in R$ et $q \in N$ tels que pour tout $n \in N$, il existe $x_n \in X$ tel que

$$\alpha'(x_n) = a\theta'^{qn} + b \tag{13}$$

où α' désigne la fonction d'approximation du système de numération associé à θ'.

Comme θ et θ' sont indépendants, il en est de même de θ^m et θ'^q. En vertu de cette indépendance, de (11) et (13), il existe une suite double d'entiers strictement croissante $(n_i, n'_i)_{n\in N}$ telle que la suite $(\frac{\alpha'(x_{n'_i})}{\theta^{mn_i}})_{i\in N}$ converge vers une limite l telle que

$$\alpha(v)(1+\varepsilon) < l < \alpha(v+1)(1-\varepsilon)$$

Comme $\lim_i \dfrac{\alpha'(x_{n'_i})}{x_{n'_i}} = 1$, la suite $(\frac{x_{n'_i}}{\theta^{mn_i}})_{i\in N}$ converge aussi vers l. Par conséquent, il résulte de (12) que pour i assez grand, on a

$$d_{mn_i}(v) < x_{n'_i} < d_{mn_i}(v+1)$$

ce qui contredit (10).

7 Conséquence : le théorème de Cobham dans N^k

Soit $\theta > 1$ et soit $A = \{0, 1, \ldots, \lceil\theta\rceil - 1\}$. Soit $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in N^k$. Notons $r(u_1)$, $r(u_2)$, $\ldots$, $r(u_k)$ les représentations normales de u_1, u_2, $\ldots$, u_k après avoir égalisé leurs longueurs en ajoutant éventuellement des zéros à gauche de certaines d'entre elles. Le k-uple $(r(u_1), r(u_2), \ldots, r(u_k))$ s'identifie alors à un élément noté $r(u)$ du monoïde libre $(A^k)^*$.

Exemple : Prenons $\theta = k = 2$; alors $r(2, 1) = (1, 0)(0, 1)$.

La notion de θ-reconnaissabilité s'étend aux parties de N^k : une partie X de N^k est *θ-reconnaissable* si l'ensemble $\{r(x) \mid x \in X\}$ est une partie reconnaissable de $(A^k)^*$.

Soit $\theta > 1$ un nombre réel. On dira que θ est *acceptable* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
1) N est θ-reconnaissable ;
2) L'addition est θ-reconnaissable, i.e.

$$\{(u, v, w) \in N^3 \mid u = v + w\}$$

est une partie θ-reconnaissable de N^3.

Dans [8] (et aussi dans [4]), il est montré que si θ est un nombre de Pisot et si de plus le polynôme de la récurrence du système de numération associé est le polynôme minimal de θ, alors θ est acceptable.

D'autre part, de [4] on peut déduire le résultat suivant.

Proposition 1 *Soit $\theta > 1$ un nombre réel acceptable et soit X une partie θ-reconnaissable de N^k. Alors toute partie X' définissable dans la structure $< N, +, X >$ est encore θ-reconnaissable. De plus, toute partie définissable dans la structure $< N, + >$ est θ-reconnaissable.*

Remarques 1) En substance, une partie X' de N^k est *définissable* dans la structure $< N, +, X >$ si X' est l'ensemble des k-uples $(u_1, u_2, \ldots, u_k) \in N^k$ vérifiant une formule du premier ordre $\psi(u_1, \ldots, u_k)$, les variables u_i appartenant au domaine N et la formule faisant éventuellement intervenir des constantes, l'ensemble X, ainsi que l'addition $+$. Par exemple, avec $X \subseteq N$, l'ensemble $X' \subseteq N^2$ des couples (u_1, u_2) de nombres pairs dont la somme appartient à X et est un multiple de 3 est définissable dans cette structure par la formule :

$$u_1 + u_2 \in X \wedge \exists x \exists y \exists z (u_1 = x + x) \wedge (u_2 = y + y) \wedge (u_1 + u_2 = z + z + z)$$

2) Il est classique qu'une partie $X \subseteq N^k$ est définissable dans la structure $< N, + >$ si et seulement si c'est une partie rationnelle du monoïde $(N^k, +)$.

Les résultats de C. Michaux et R. Villemaire [9] établissent le théorème suivant.

Théorème 2 *Soit X une partie de N^k qui n'est pas définissable dans la structure $< N, + >$. Alors il existe une partie X' de N qui est définissable dans la structure $< N, +, X >$ et qui est non syndétique.*

Le "théorème de Cobham" suivant, également démontré par une méthode différente dans [2], est un corollaire du théorème 1, de la proposition 1 et du théorème 2.

Théorème 3 *Soient θ et θ' deux nombres réels > 1, acceptables et indépendants. Une partie X de N^k est rationnelle si et seulement si elle est simultanément θ-reconnaissable et θ'-reconnaissable.*

Démonstration. Soit X une partie rationnelle de N^k. Elle est définissable dans la structure $< N, + >$. Donc, d'après la proposition 1, elle est θ-reconnaissable et θ'-reconnaissable.

Réciproquement, soit X une partie θ-reconnaissable et θ'-reconnaissable. Elle est (évidemment) définissable dans la structure $< N, +, X >$. Si elle n'était pas rationnelle, c'est-à-dire si elle n'était pas définissable dans la structure $< N, + >$, il existerait, d'après le théorème 2, une partie $X' \subseteq N$ définissable dans la structure $< N, +, X >$ et non syndétique. Mais, d'après la proposition 1, cette partie serait aussi θ-reconnaissable et θ'-reconnaissable, ce qui est contradictoire avec le théorème 1.

Remerciements. Je remercie vivement V. Bruyère pour ses nombreuses et judicieuses remarques.

References

[1] A. Bertrand-Mathis, Comment écrire les nombres entiers dans une base qui n'est pas entière, *Acta Math. Sci. Hungar*, **54**, (1989), 237–241.

[2] A. Bes, An extension of the Cobham-Semenov theorem, *preprint*, (1996), 10 pages.

[3] V. Bruyère, Automata and Numeration Systems, *http://cartan.u-strasbg.fr:80/~slc*, (1996).

[4] V. Bruyère, G. Hansel, Bertrand numeration systems and recognizability, *preprint*, (1995), 22 pages.

[5] V. Bruyère, G. Hansel, C. Michaux, R. Villemaire, Logic and p-recognizable sets of integers, *Bull. Belg. Math. Soc.*, **1**, (1994), 191–238.

[6] A. Cobham, On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata, *Math. Systems theory*, **6**, (1972), 164–192.

[7] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, Academic Press, New-York, (1974).

[8] C. Frougny, B. Solomyak, On representation of integers in linear numeration systems. dans *Ergodic theory of* $\mathbf{Z}^d$*-Actions*, édité par M. Pollicott et K. Schmidt, London Mathematical Society Lecture Note Series **228**, Cambridge University Press, 1996, 345–368.

[9] C. Michaux, R. Villemaire, Presburger arithmetic and recognizability of natural numbers by automata : new proofs of Cobham's and Semenov's theorems, *Annals of Pure and Applied Logic*, **77**, (1996), 251–277.